অধ্যায়-৬ কেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্র

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ভরকেন্দ্র বলতে কী বুঝায়?**

বাকাশিবো- ২০০০, ০৩, ০৪, ০৮, ১১'পরি, ১৫'পরি, ১৬, ১৬'পরি, ১৭, ১৭'পরি, ১৮, ২৪

উত্তর ঃ কোনো বস্তুর প্রতিটি কণার উপর ক্রিয়াশীল মাধ্যাকর্ষণ বলের লব্ধি এ বস্তুর যে বিন্দু দিয়ে যায় তাকেই বস্তুর ভরকেন্দ্র বলে। অর্থাৎ পৃথিবীর যে আকর্ষণ বল বস্তুর যে বিশেষ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তাই বস্তুর ভরকেন্দ্র। সেন্ট্রয়েড বা কেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্র মূলত একই।

***** ২। কী কী উপায়ে ভরকেন্দ্র নির্ণয় করা হয়?**

বাকাশিবো- ২০০৫, ১৩, ১৩'পরি, ১৪'পরি, ১৬'পরি, ১৭, ১৭'পরি, ২০, ২১

উত্তর ঃ ভরকেন্দ্র বা কেন্দ্র চারটি পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায় যথা ঃ

১। জ্যামিতিক পদ্ধতি।
২। লেখচিত্র পদ্ধতি।
৩। মোমেন্ট পদ্ধতি।
৪। ইন্টিগ্রেশন পদ্ধতি।

*** ৩। ভরকেন্দ্র ও কেন্দ্রের মাঝে পার্থক্য কী?

বাকাশিবো- ২০০৭, ০৮, ১৩, ১৩'পরি, ১৪'পরি, ১৫'পরি, ২৩

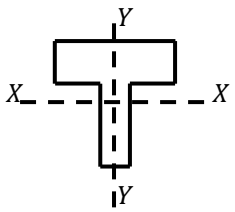
উত্তর ঃ নিম্নে ভরকেন্দ্র এবং কেন্দ্রের মাঝে পার্থক্য দেয়া হলো ঃ

ভরকেন্দ্র (Center of gravity)	কেন্দ্র (Centroid)
i) কোনো বস্তুর প্রতিটি কণার উপর ক্রিয়াশীল মাধ্যাকর্ষণ বলের লব্ধি এ বস্তুর যে বিন্দু দিয়ে যায় তাকেই বস্তুর ভরকেন্দ্র বলে।	i) বিভিন্ন জ্যামিতিক ক্ষেত্র (ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি) যাদের শুধুমাত্র ক্ষেত্রফল আছে ভর নেই ঐ সমস্ত ক্ষেত্রফলের মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র (Centroid) বলে।
ii) উদাহরণ ঃ বই, খাতা, চেয়ার, টেবিল, সিলিন্ডার ইত্যাদি।	ii) উদাহরণ ঃ ত্রিভুজ, বৃত্ত, আয়তক্ষেত্র ইত্যাদি।

*** ৪। প্রতিসম অক্ষ বলতে কী বুঝায়?

বাকাশিবো- ২০০১, ০৩, ০৭, ১০, ১০'পরি, ১১, ১১'পরি, ১২, ১৩,'পরি, ১৪, ১৪'পরি, ১৫, ১৫'পরি, ১৭, ১৭'পরি

উত্তর ঃ যে অক্ষ বরাবর বস্তুর ক্ষেত্রফল বা ওজনকে খুব সহজেই সমান দু'ভাগে ভাগ করা যায় তবে ঐ অক্ষকে বস্তুর প্রতিসম অক্ষ বলে।



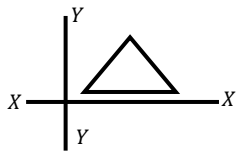
চিত্রে Y-Y অক্ষ প্রতিসম অক্ষ।

*** ৫। রেফারেন্স অক্ষ বলতে কী বুঝায়?

বাকাশিবো- ২০০৯, ১৩, ১৩'পরি, ১৪'পরি, ১৫, ১৫'পরি, ১৭, ১৭'পরি, ১৮'পরি, ১৯, ১৯'পরি

উত্তর ঃ কোন বস্তুর বা ক্ষেত্রের কেন্দ্র সর্বদা একটি কল্পিত অক্ষের সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়, ঐ কল্পিত অক্ষকে রেফারেন্স অক্ষ বলে।

চিত্রে X-X ও Y-Y হচ্ছে রেফারেন্স অক্ষ।



SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের গভীরতা $\frac{h}{3}$**

বাকাশিবো- ২০১৭'পরি, ১৯, ২২

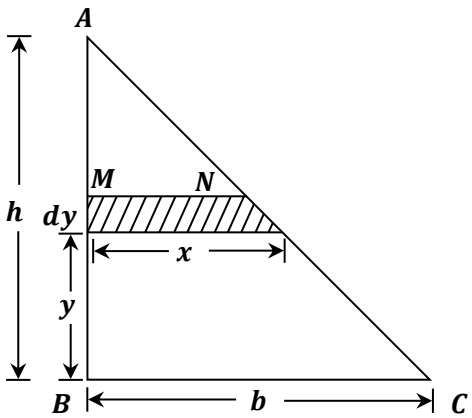
উত্তর ঃ মনেকরি, ABC একটি ত্রিভুজ।

এর ভূমি $BC = b$ এবং উচ্চতা $AB = h$

এখন, উচ্চতা বরাবর একটি ক্ষুদ্র ফালি $(strip)$ কল্পনা করি,

যার পুরুত্ব dy এবং ভূমি হতে y উচ্চতায় অবস্থিত।

সদৃশ ত্রিভুজের ধারণা থেকে পাই,



$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y)$$

ক্ষুদ্রফালির ক্ষেত্রফল, $(dA) = x.dy$

$$= \frac{b}{h}(h-y)$$

ত্রিভুজের মোট ক্ষেত্রফল, $A = \frac{1}{2}.b.h$

ভরকেন্দ্রের উচ্চতা $\bar{y}$ হলে,

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A}$$ [ভরকেন্দ্রের সূত্র]

$$= \frac{1}{A}\int_0^h y\frac{b}{h}(h-y)dy$$ [dA এর মান বসিয়ে ইন্টিগ্রেশন করি]

$$= \frac{1}{A} \times \frac{b}{h}\int_0^h (hy - y^2)dy$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}bh} \times \frac{b}{h}\left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{2}{h^2}\left[\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{h^2}\left[\frac{3h^3 - 2h^3}{6}\right]$$

$$= \frac{2}{h^2}\left[\frac{h^3}{6}\right]$$

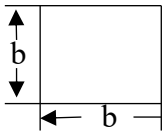
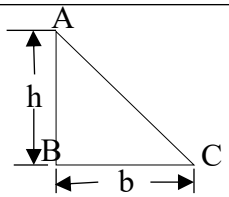
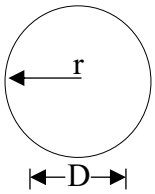
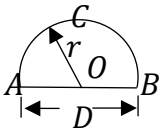
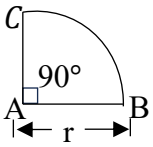
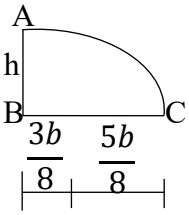
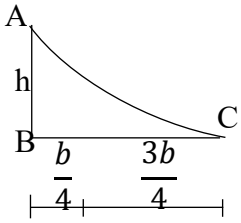
$= \frac{h}{3}$ (প্রমাণিত)

SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

ভরকেন্দ্র ঃ $\bar{x} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}$

$$\bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots\ldots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}$$

নাম	চিত্র	ভরকেন্দ্র (x,y)	ক্ষেত্রফল
১.আয়তক্ষেত্র		$\frac{b}{2},\frac{d}{2}$	bd
২.ত্রিভুজ		$\frac{b}{3},\frac{h}{3}$(B থেকে) $\frac{2b}{3},\frac{2h}{3}$(C ও A থেকে)	$\frac{1}{2}\times b\times h$
৩.বৃত্ত		$\left(\frac{D}{2},\frac{D}{2}\right)$	$\frac{\pi}{4}\times D^2 or\ \pi r^2$
৪.অর্ধবৃত্ত		(0.424r) [বেস (AB) থেকে] (0.576r)[শীর্ষ (C) থেকে]	$\frac{\pi r^2}{2}$
৫.কোয়ার্টার বৃত্ত		0.424r (মাঝ খান (A) হতে) 0.576r (শীর্ষ (B/C) হতে)	$\frac{\pi}{16}D^2$ $\frac{\pi r^2}{4}$
৬.উত্তালাকৃতি		$\frac{3b}{8},\frac{3h}{8}$(B বিন্দু হতে) $\frac{5b}{8},\frac{5h}{8}$ (C বা A বিন্দু হতে)	$\frac{2}{3}bh$
৭.অবতলাকৃতি		$\frac{b}{4},\frac{h}{4}$(B বিন্দু হতে) $\frac{3b}{4},\frac{3h}{4}$ (C বা A বিন্দু হতে)	$\frac{1}{3}bh$

❖ যে অক্ষে প্রতিসম হবে তার বিপরীত অক্ষের ভরকেন্দ্র সহজেই (সরাসরি) পাব। আর ঐ অক্ষের ভরকেন্দ্র আমাদের বের করতে হবে।

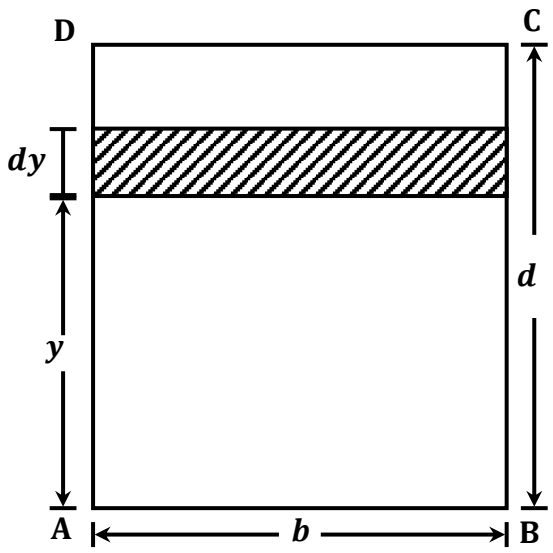
❖ রেফরেন্স অক্ষ দেয়া না থাকলে ক্ষেত্রটির সর্ববামে (y- অক্ষ) ও সর্বনিচে (x- অক্ষ) রেফারেন্স অক্ষ কল্পনা করে $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ নির্ণয় করতে হবে।

❖ ফাঁকা সেকশনের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক $(-ve)$ হবে।

***** ১। প্রমাণ কর যে, আয়তক্ষেত্রের ভরকেন্দ্র, $\bar{y} = \frac{d}{2}$**

বাকাশিবো- ২০১৩, ১৪'পরি, ১৮, ১৮'পরি, ২৪

সমাধান ঃ



মনেকরি, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

x অক্ষের সমান্তরালে, ভূমি থেকে y উচ্চতায় dy পুরুত্বের একটি ক্ষুদ্রফালি বিবেচনা করি।

ফালির ক্ষেত্রফল, $dA = b.dy$

x অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষুদ্র ফালির মোমেন্ট, $dm = y.dA$

আবার, $M_x = \int_0^d b.y\,dy$ [মোট মোমেন্ট বের করার জন্য 0 থেকে d সীমার মধ্যে ইন্টিগ্রেশন]

$$= b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^d$$

$$= \frac{b.d^2}{2}$$

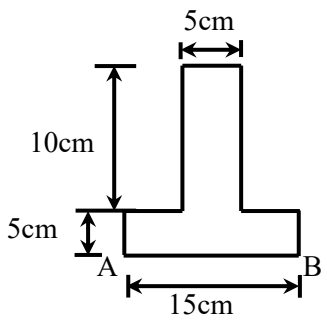
ভরকেন্দ্রের সূত্রানুসারে, $\bar{y} = \frac{m_x}{A}$

$$= \frac{\frac{bd^2}{2}}{b.d} \quad [A = b.d]$$

$$= \frac{d}{2} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

***** ২। চিত্রে প্রদর্শিত সেকশনটির সেন্ট্রয়েড নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০১১, ২৪



সমাধান ঃ চিত্রে প্রদর্শিত সেকশনটি y অক্ষে প্রতিসম

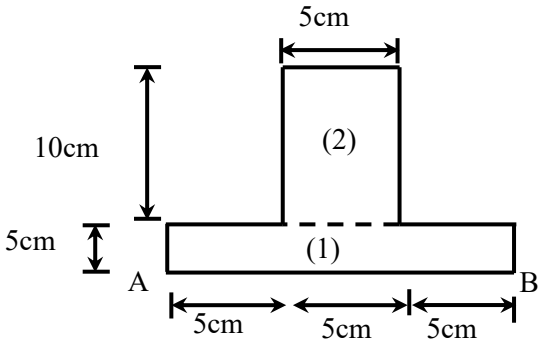
$$\therefore \bar{x} = \frac{15}{2} = 7.5\text{cm} \quad (\textbf{Ans.})$$

$$a_1 = 15 \times 5 = 75\text{cm}^2$$

$$a_2 = 5 \times 10 = 50\text{cm}^2$$

$$y_1 = \frac{5}{2} = 2.5\text{cm}$$

$$y_2 = 5 + \frac{10}{2} = 10\text{cm}$$



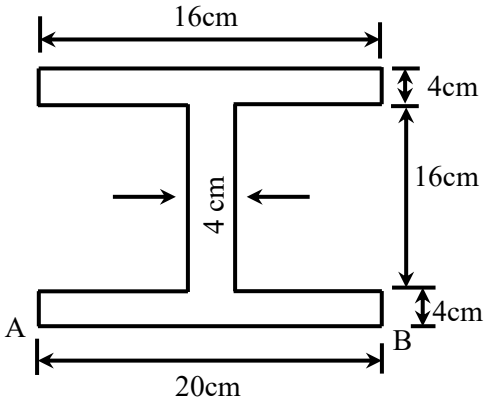
$$\therefore \bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2}$$

$$= \frac{75\times2.5+50\times10}{75+50}$$

$= 5.5\text{cm}$ নিচ থেকে উপরে **(Ans.)**

**** ৩। চিত্রে প্রদর্শিত সেকশনটির কেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০১৩'পরি, ১৮'পরি, ২২



সমাধান ঃ I সেকশনটি y-y অক্ষে প্রতিসম বলে $\bar{y}$ নির্ণয় করতে হবে।

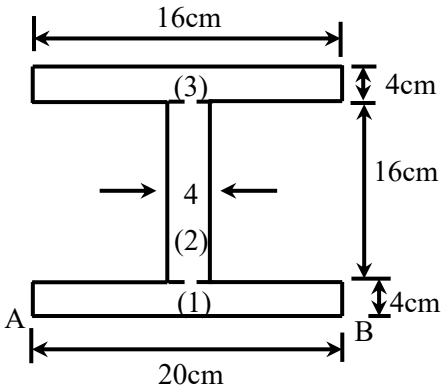
$$\therefore \bar{x} = \frac{20}{2} = 10\ cm\ \textbf{(Ans.)}$$

$$a_1 = 20 \times 4 = 80\text{cm}^2$$

$$a_2 = 4 \times 16 = 64\text{cm}^2$$

$$a_3 = 4 \times 16 = 64\text{cm}^2$$

$$y_1 = \frac{4}{2} = 2\text{cm}$$



$$y_2 = 4 + \frac{16}{2} = 12\text{cm}$$

$$y_3 = 4 + 16 + \frac{4}{2} = 22\text{cm}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

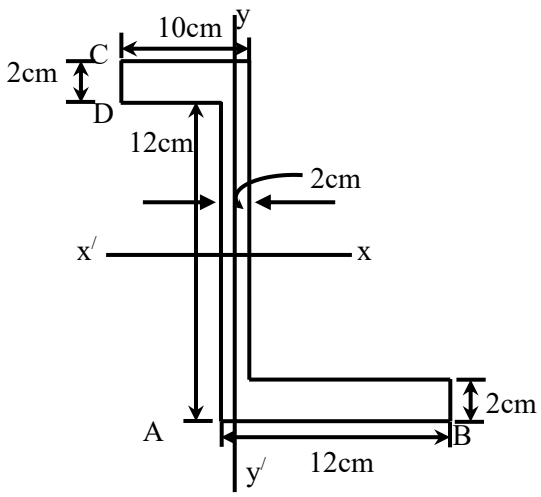
$$= \frac{80\times2 + 64\times12 + 64\times22}{80+64+64}$$

$= 11.23\text{cm}$ নিচ থেকে উপরে

সুতরাং সেকশনটির ভরকেন্দ্র AB রেফারেন্স অক্ষ হতে 11.23cm উপরে অবস্থিত। **(Ans.)**

**** ৪। চিত্রে প্রর্দশিত Z সেকশনটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।**

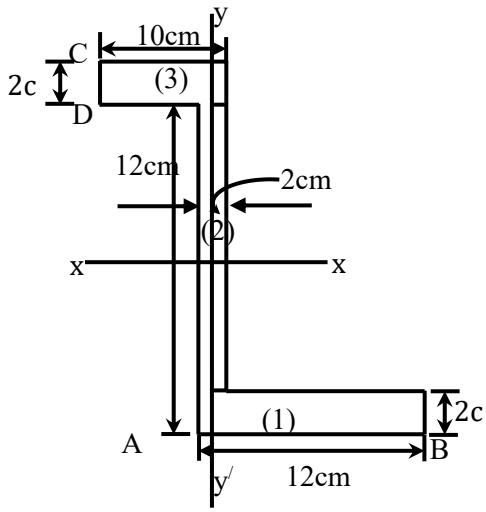
বাকাশিবো- ২০১৫, ১৫'পরি



সমাধান ঃ চিত্রের Z সেকশনটির কোনো অক্ষেই প্রতিসম নয়। তাই এক্ষেত্রে $\bar{x}$ এবং $\bar{y}$ নির্ণয় করতে হবে।

$$a_1 = 12 \times 2 = 24\text{cm}^2$$

$$a_2 = 10 \times 2 = 20cm^2$$
$$a_3 = 10 \times 2 = 20cm^2$$
$$y_1 = \frac{2}{3} = 1cm$$
$$y_2 = 2 + \frac{10}{2} = 7cm$$
$$y_3 = 2 + 10 + \frac{2}{2} = 13cm$$



$$\bar{y} = \frac{a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3}{a_1+a_2+a_3}$$
$$= \frac{24\times1+20\times7+20\times13}{24+20+20}$$
$= 6.625cm$ AB হতে উপরে (**Ans.**)

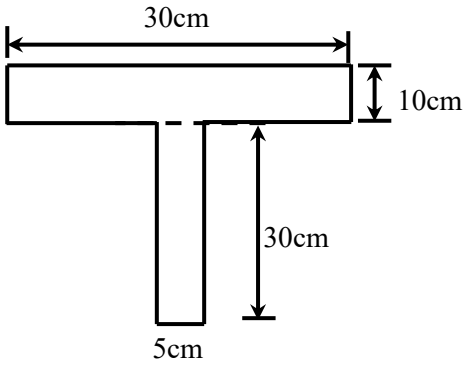
$\bar{x}$ নির্ণয় করার জন্য বামপার্শ্বের CD বরাবর রেফারেন্স অক্ষ ধরে-(অর্থাৎ সর্ববামে বিবেচনা করতে হবে)

$$x_1 = 8 + \frac{12}{2} = 14cm$$
$$x_2 = 8 + \frac{2}{2} = 9cm$$
$$x_3 = \frac{10}{2} = 5cm$$

$$\bar{x} = \frac{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3}{a_1+a_2+a_3}$$
$$= \frac{24\times14+20\times9+20\times5}{24+20+20}$$
$= 9.625cm$ CD হতে ডানে (**Ans.**)

*** ৫। চিত্রানুযায়ী সেকশনটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

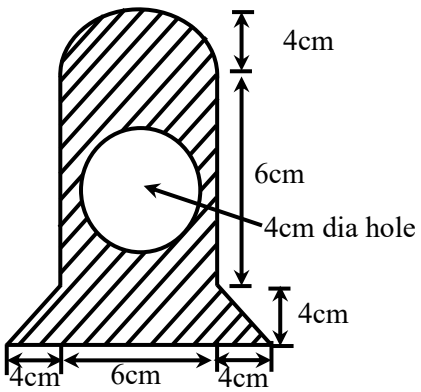
বাকাশিবো- ২০১৬'পরি, ১৭, ১৭'পরি



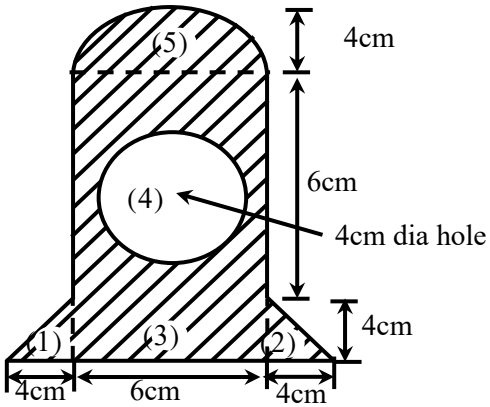
সমাধান ঃ ১ নং এর অনুরূপ। ($Ans. \bar{x} = 15\ cm$ ডানে, $\bar{y} = 25\ cm$ উপরে)

** ৬। চিত্রে প্রদর্শিত সেকশনটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

বাকাশিবো- ২০১৯, ১৯'পরি



সমাধান ঃ



সেকশনটি y-y অক্ষে প্রতিসম

$$\therefore \bar{x} = \frac{4+6+4}{2} = 7\text{cm} \ \ (\text{Ans})$$

$$a_1 = 0.5 \times 4 \times 4 = 8\text{cm}^2$$

$$a_2 = 0.5 \times 4 \times 4 = 8\text{cm}^2$$

$$a_3 = 6 \times 10 = 60\text{cm}^2$$

$$a_4 = \frac{\pi}{4} \times 4^2 = 12.56\text{cm}^2 \ (-ve)$$

$$a_5 = \frac{\pi}{8} \times 8^2 = 25.13\text{cm}^2$$

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{3} \times 4 = 1.33\text{cm}$$

$$y_3 = \frac{10}{2} = 5\text{cm}$$

$$y_4 = 4 + \frac{6}{2} = 7\text{cm}$$

$$y_5 = 10 + 0.424 \times 4 = 11.69\text{cm}$$

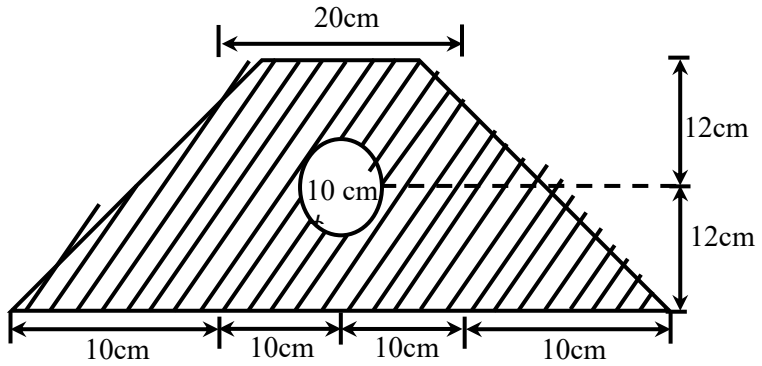
Note: a_5 একটি অর্ধ-বৃত্ত।
অর্ধ-বৃত্তের ক্ষেত্রফল $\frac{\pi}{8} \times D^2$ বা $\frac{\pi r^2}{2}$ হবে।
4 নং সেকশনটি ফাঁকা,
তাই এর ক্ষেত্রফল $(-ve)$ হবে।

$$\therefore \bar{y} = \frac{a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3-a_4y_4+a_5y_5}{a_1+a_2+a_3-a_4+a_5}$$

$$= \frac{8\times1.33+8\times1.33+60\times5-12.56\times7+25.13\times11.69}{8+8+60-12.56+25.13}$$

$= 5.95$ cm উপরে (**Ans.**)

৭। চিত্রে প্রদর্শিত সেকশনটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর। বাকাশিবো- ২০১২'পরি



সমাধান ঃ সেকশনটি y-y অক্ষে প্রতিসম। তাই $\bar{y}$ নির্ণয় করতে হবে।

$$\therefore \bar{x} = \frac{40}{2} = 20\ cm\ (\boldsymbol{Ans.})$$

$$a_1 = a_2 = 0.5 \times 10 \times 24 = 120cm^2$$

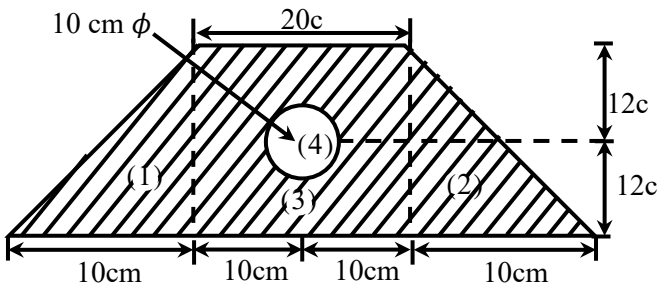
$$a_3 = 20 \times 24 = 480cm^2$$

$$a_4 = \frac{\pi}{4} \times 10^2 = 78.54cm^2$$

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{3} \times 24 = 8cm$$

$$y_3 = \frac{24}{2} = 12cm$$

$$y_4 = 12cm$$



$$\therefore \bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}$$

$$= \frac{120\times8 + 120\times8 + 480\times12 - 78.54\times12}{120 + 120 + 480 - 78.54}$$

[ফাঁকা ক্ষেত্রফল $(-ve)$]

$= 10.50cm$ উপরে **(Ans.)**